جمهوری اسلامی ایران
وزارت آموزش و پرورش

ماخ

دفترچه سوالات

مرحله دوم

بیست و یکمین دوره‌ی المپیاد کامپیوتر سال ۱۳۸۹

تعداد سوالات		مدت آزمون (دقیقه)
سوالات چند گزینه‌ای	مساله‌های تشریحی	
۱۸	۵	۲۴۰

توضیحات مهم

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

تذکرات آزمون:

ضمن آرزوی موفقیت برای شما دانش‌پژوه گرامی، خواهشمند است قبل از پاسخ به سؤالات آزمون به موارد زیر توجه کنید:

- این آزمون شامل **۱۸ سوالات تستی، ۵ مسأله‌ی تشریحی** و وقت آن **۲۴۰ دقیقه** است.
- استفاده از ماشین‌حساب در این آزمون غیر مجاز است.
- همراه داشتن تلفن همراه (حتی خاموش) در طول زمان آزمون مجاز **نیست**.
- فقط داوطلبانی می‌توانند دفترچه‌ی سؤالات را با خود ببرند که تا پایان آزمون در جلسه حضور داشته باشند.
- انتشار و بازتولید این سوالات توسط **کمیته‌ی اجرایی ماخ** انجام شده است.

www.MAAKH.ir

کلیه حقوق این سوالات برای ماخ محفوظ است.

- **جواب درست به سوال‌های یک تا دوازده ٤ نمره مثبت و جواب نادرست ۱ نمره منفی دارد.**
- **جواب درست به سوال‌های سیزده تا هجده ٦ نمره مثبت و جواب نادرست ۱/۵ نمره منفی دارد.**

۱- کدام رقم، به عنوان سمت چپ‌ترین رقم نمایش دهدهی اعداد مجموعه‌ی $A = \{1,2,4,8,\ldots,2^{100}\}$ بیشتر ظاهر شده است؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱ ب) ۲ ج) ٤ د) ۱ و ۲ هـ) ۲ و ٤

۲- اعداد ۱ تا ۱۰ را دور دایره طوری قرار داده‌ایم که مجموع قدرمطلق اختلاف هر دو عدد مجاور بیشینه شده است. این مقدار بیشینه چند است؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ٥٤ ب) ٥٣ ج) ٥٢ د) ٥٢ هـ) ٥٠

۳- ۷ چراغ روشن روی یک ریسه خطی، پشت سر هم قرار دارند. آیدین و مرتضی به نوبت و تنها یک بار هر کدام یک چراغ از این ریسه را خاموش می‌کنند. پس از آن ارزش این ریسه که ۵ چراغ روشن دارد سنجیده می‌شود. ارزش ریسه به طور یکتا معلوم می‌شود و برابرست با حاصل‌ضرب طول تمام دسته‌های متوالی از چراغ‌های روشن. برای مثال اگر چراغ روشن را با ۱ و چراغ خاموش را با صفر نشان دهیم، ارزش ریسه‌ی ۱۱۰۰۱۱۱ برابر با ٦ و ارزش ریسه‌ی ۱۰۱۱۰۱۱ برابر با ٤ است. می‌دانیم آیدین دوست دارد ارزش ریسه نهایی تا حد امکان کم شود و مرتضی دوست دارد این ارزش زیاد بشود. اگر آیدین شروع کننده باشد و بهترین حرکتش را برای رسیدن به مقصودش انجام دهد، ارزش نهایی ریسه چند خواهد شد؟ اگر مرتضی شروع‌کننده باشد چه‌طور؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) آیدین ٤ و مرتضی ٦ ب) آیدین ٤ و مرتضی ٤ ج) آیدین ۵ و مرتضی ۵
د) آیدین ٦ و مرتضی ٤ هـ) آیدین ۵ و مرتضی ٤

۴- ماشین «بازپرور» یک رشته‌ی ارقام در مبنای دو را به عنوان ورودی گرفته و یک رشته‌ی جدید برمی‌گرداند. اگر رشته‌ی ورودی $S = s_1 s_2 \ldots s_n$ باشد، این ماشین با در نظر گرفتن یک رشته خروجی تهی در ابتدا، از چپ به راست بیت‌های S را می‌خواند، سپس به ازای هر بیت که یک باشد خود S و به ازای هر بیت که صفر باشد نقیض S را به رشته خروجی می‌چسباند. منظور از نقیض یک رشته، رشته‌ای با همان طول است که هر بیت صفر آن به یک و هر بیت یک آن صفر شده باشد. برای مثال اگر به این ماشین رشته‌ی ۱۰۱۱ را بدهیم، رشته‌ی خروجی ۱۰۱۱۰۱۰۰۱۰۱۱۱۰۱۱ خواهد بود. واضح است که اگر طول رشته ورودی n باشد، طول رشته خروجی n^2 خواهد بود.

رشته سه بیتی $A = a_1 a_2 a_3$ را طلایی گوییم، اگر با شروع از یکی از اعضای مجموعه $\{000,001,010,011\}$ و استفاده مکرر از دستگاه بازپرور بتوان به رشته‌ای مانند $B = b_1 b_2 \ldots b_m$ رسید که رشته‌ی A زیررشته آن باشد. رشته‌ی A زیررشته B است، اگر اندیسی مانند i وجود داشته باشد که $i \le m-2$ و $b_i = a_1, b_{i+1} = a_2$ و $b_{i+2} = a_3$. برای مثال رشته ۱۰۰ طلایی است چرا که با شروع از ۱۰ و یک بار استفاده از دستگاه به رشته ۱۰۰۱ می‌رسیم که رشته ۱۰۰ زیررشته‌ی آن است. چند تا از رشته‌های مجموعه‌ی $\{101,010,000,111\}$ طلایی هستند؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ٤

۵- ماخ امروز تولد حسام است. پدر حسام برنامه زیر را نوشته و آن را به حسام داده است:

۱. جایگشت $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{10} \rangle$ از اعداد ۱ تا ۱۰ را از ورودی بگیر.
۲. مقدار S را برابر صفر قرار بده.
۳. برای i از ۱ تا ۸ کارهای زیر را انجام بده.
  ۱.۳. مقدار C را برابر a_i قرار بده.
  ۲.۳. در صورتی که مقدار a_{i+1} از C بیشتر است، مقدار C را برابر a_{i+1} قرار بده.
  ۳.۳. در صورتی که مقدار a_{i+2} از C بیشتر است، مقدار C را برابر a_{i+2} قرار بده.
  ۴.۳. مقدار C را به مقدار کنونی S اضافه کن و حاصل را در همان S بریز.
۴. مقدار S را به عنوان خروجی برگردان.

پدر حسام به وی گفته است که تنها یک بار می‌تواند یک جایگشت از اعداد ۱ تا ۱۰ را به این برنامه بدهد و خروجی هر چند شد، حسام آن مقدار سکه از پدرش جایزه می‌گیرد. برای مثال اگر حسام جایگشت $\langle 10,9,8,7,6,1,2,3,4,5 \rangle$ را به عنوان ورودی به این برنامه بدهد، پدرش به او ۵۲ سکه به عنوان کادوی تولد می‌دهد. حداکثر تعداد سکه‌هایی که حسام می‌تواند با دادن بهترین ورودی از پدرش بگیرد چند تاست؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۶۴ ب) ۶۸ ج) ۷۳ د) ۸۱ هـ) ۸۸

۶- ماخ دنباله $\langle 1,4,8,43,21,33,17,52,42,52,42,7,8,22,15 \rangle$ از اعداد طبیعی داده شده است. به ازای هر تعداد متوالی از این اعداد، باقیمانده‌ی مجموع آن اعداد بر ۳ را روی یک کاغذ یادداشت می‌کنیم. چند عدد صفر روی کاغذ نوشته‌ایم؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۳۳ ب) ۳۴ ج) ۳۶ د) ۳۸ هـ) ۴۰

۷- ماخ افراز عدد m به n عدد طبیعی، نوشتن عدد m به شکل $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ با شرایط زیر است:

- $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = m$
- $1 \le a_1 \le a_2 \le \cdots \le a_n$

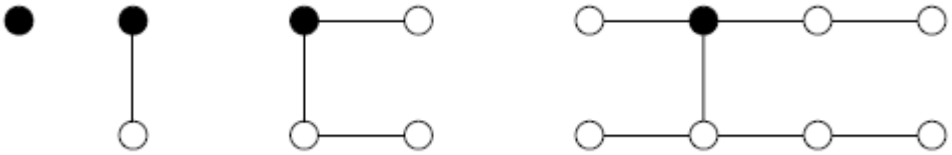
افراز $\langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$ از افراز $\langle b_1, b_2, \ldots, b_n \rangle$ کوچک‌تر است، اگر به ازای یک اندیس i که $1 \le i \le n$ داشته باشیم:

- مقدار a_i از b_i کوچک‌تر باشد.
- برای تمام اندیس‌های j کمتر از i مقدارهای a_i و b_i برابر باشند.

تمام افرازهای عدد ۲۰ به ۷ قسمت را از کوچک به بزرگ مرتب می‌کنیم. در این صورت اولین افراز $\langle 1,1,1,1,1,1,14 \rangle$ و آخرین افراز $\langle 2,3,3,3,3,3,3 \rangle$ است. اگر افراز بعد از $\langle 1,2,2,3,4,4,4 \rangle$ افراز $\langle c_1, c_2, \ldots, c_7 \rangle$ باشد، مقدار $c_1 - c_3 + c_5 - c_7$ کدام است؟ (۴ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱- ب) ۲- ج) ۳- د) ۴- هـ) ۵-

۸- تلسکوپ فضایی هابل عصر روز اول فروردین ماه سال ۱۳۹۰ حضور یک موجود فضایی تنها از نوع موسوم به گولولی را روی کره ماه گزارش کرده است. دانشمندان می‌دانند که این موجود هـــــــــر روز ظهر یک نمونه کاملاً مشابه با خودش می‌سازد. سپس با یک طناب از جنس سیلیکات کربن (که در کره ماه یافت می‌شود)، خودش را به موجود جدید وصل می‌کند! با این وصف دانشمندان انتظار دارند که در عصر هر یک از روزهای اول تا چهارم فروردین ماه شکلی شبیه زیر از گولولی‌ها روی کره ماه مشاهده کنند. گولولی‌ها با دایره و طناب‌های سیلیکات کربن با خط مشخص شده‌اند. گولولی اول تیره رسم شده است.



فاصله هر گولولی از گولولی اولیه برابر با تعداد طناب‌های سیلیکات کربن بین کوتاه‌ترین مسیر گوگولیایی موجود بین آن دو است. در پایان روز سیزدهم فروردین مجموع فواصل تمام گولولی‌های موجود از گولولی اولیه چند است؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

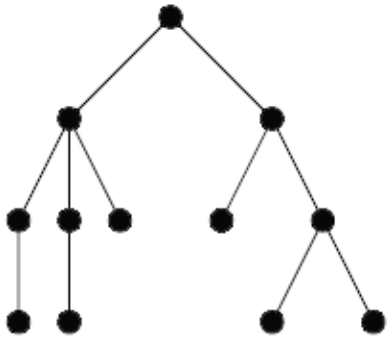
الف) ۱۳۲ ب) ۱۵٦ ج) ۸۱۹۲ د) ۲٦٥۷٦ هـ) ۲٦٦۲٤

۹- ۱۰ جعبه با شماره‌های ۱ تا ۱۰ داریم که در مجموع ۳۰ توپ در آن‌ها قرار دارند. وضعیت هر لحظه جعبه‌ها را با $\langle a_1, a_2, \ldots, a_{10} \rangle$ نشان می‌دهیم که a_i تعداد توپ‌های جعبه‌ی i است. در هر گام یک اندیس i بین ۱ تا ۱۰ انتخاب می‌کنیم و در صورت وجود جعبه a_i، تمام توپ‌های جعبه i را به جعبه a_i منتقل کنیم. یک گام مجاز است اگر با انجام آن تعداد توپ‌های داخل جعبه‌ها تغییر کند. با شروع از چند تا از آرایش‌های اولیه زیر می‌توان ۵۰ گام مجاز انجام داد؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

$\langle ۳,۷,۲,۱,۵,۵,۶,۰,۰,۱ \rangle$ $\langle ۶,۵,۲,۳,۱,۱,۴,۰,۰,۸ \rangle$
$\langle ۱,۱,۲,۳,۴,۱,۵,۴,۴,۵ \rangle$ $\langle ۰,۲,۳,۲,۳,۴,۶,۵,۳,۲ \rangle$

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ٤

۱۰- گراف G در شکل داده شده است. هدف این است که از یک رأس دلخواه شروع به حرکت کنیم و تمام رأس‌ها را حداقل یک بار ملاقات کنیم. در هر گام می‌توان از رأس فعلی به یکی از رئوس مجاور آن رفت. حداقل چند گام برای دستیابی به هدف موردنظر لازم است؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)



الف) ۱٤ ب) ۱۵ ج) ۱٦ د) ۱۷ هـ) ۱۸

۱۱- خیکوله می‌خواهد یک دستگاه خودپرداز بسازد. برای این کار او ۵ ماشین پرداخت کننده با شماره‌های ۱ تا ۵ خریده است. ماشین i اُم یک منبع ذخیره‌ی سکه دارد که در آن می‌توان به تعداد i سکه با ارزش یکسان گذاشت. روی ماشین i اُم تعداد i دکمه با شماره‌های ۱ تا i وجود دارد. با زدن دکمه‌ی شماره j یک ماشین، آن ماشین j سکه از منبعش می‌دهد.

خیکوله می‌تواند سکه با هر ارزشی بسازد. او می‌تواند روی هر ماشین به تعداد دلخواه سکه بگذارد با این شرط که ارزش تمام سکه‌های روی یک ماشین یکسان باشند. برای پرداخت ارزش مشخصی از سکه‌ها از هر ماشین حداکثر یک بار می‌توان استفاده کرد. برای مثال فرض کنید که در ماشین اول تا سوم سکه‌هایی با ارزش ۱ تومان و در ماشین‌های چهارم و پنجم سکه‌هایی با ارزش ۱۰ تومان داریم. در این صورت:

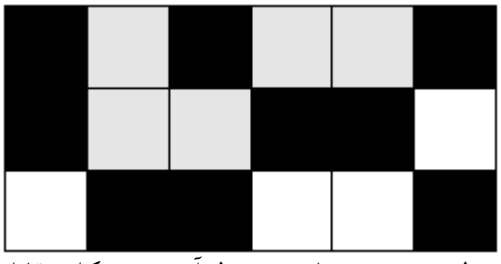
- برای پرداخت ۷ تومان روشی وجود ندارد.
- برای پرداخت ۱۳ تومان می‌توان دکمه‌ی ۳ از ماشین سوم و دکمه‌ی ۱ از ماشین چهارم را فشار داد.

فرض کنید S کوچکترین عدد طبیعی باشد که با استفاده از دستگاه خودپرداز خیکوله، روشی برای پرداخت آن وجود ندارد. خیکوله می‌خواهد ارزش سکه‌های هر یک از ماشین‌های پرداخت کننده را طوری تعیین کند که مقدار S بیشینه شود. بیشینه مقدار S چند است؟ (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ٦٤ ب) ۱۲۰ ج) ۱۲۸ د) ۷۲۰ هـ) ۱۰۲٤

۱۲- جدول مقابل شامل ۹ زوج خانه می‌باشد که با حروف مشابه (به عنوان مثال A_1 و A_2) مشخص شده‌اند. از هر زوج خانه دقیقاً یکی را سیاه می‌کنیم تا در پایان ۹ خانه از ۱۸ خانه سیاه باشند.

A_1	A_2	D_1	D_2	G_1	G_2
B_1	B_2	E_1	E_2	H_1	H_2
C_1	C_2	F_1	F_2	I_1	I_2



از بالای جدول یک جریان آب به سمت پایین سرازیر می‌شود. می‌دانیم آب هیچ‌گاه سر بالا نمی‌رود. در حقیقت آب از هر بلوک سفید به تمام بلوک‌های سفید مجاورش (که حداقل یک ضلع مجاور دارند و بالای بلوک فعلی نیستند) جریان می‌یابد. به چند طریق می‌توانیم رنگ‌آمیزی را انجام دهیم که آب به پایین جدول نرسد؟ یکی از این روش‌ها و هم‌چنین سطح دسترسی یافته توسط آب در شکل مقابل نمایش داده شده است. (٤ نمره‌ی مثبت، ۱ نمره‌ی منفی)

الف) ۱۹۲ ب) ۱۸٤ ج) ۲۱٦ د) ۲۰۲ هـ) ۲۰٤

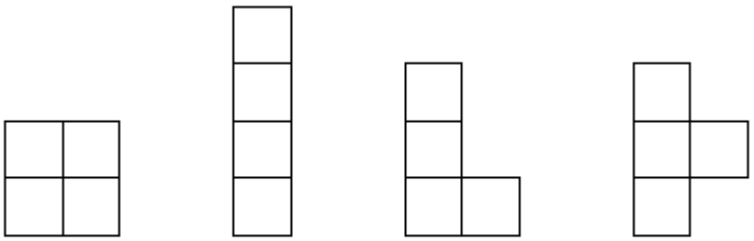
۱۳- ۵۰ نقطه روی یک خط قرار دارند. می‌خواهیم هر نقطه را با یکی از رنگ‌های ۱ تا k طوری رنگ کنیم که به ازای هر تعداد نقطه متوالی دلخواه، حداقل یک رنگ وجود داشته باشد که دقیقاً یک بار در بین این نقاط ظاهر شده است. حداقل مقدار k چند است؟ (٦ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۵ ب) ٦ ج) ۷ د) ۸ هـ) ۹

۱۴- یک جدول ۴×۴ داریم. مرتضی و مصطفی یکی در میان و با شروع از مرتضی خانه‌های جدول را علامت می‌زنند. مرتضی در نوبت خود در یک خانه خالی از جدول X قرار می‌دهد و مصطفی در نوبت خود در یک خانه خالی از جدول O قرار می‌دهد. مرتضی و مصطفی با هم چهار بازی مختلف انجام می‌دهند. بازی i برای $۱ \leq i \leq ۴$ به صورت زیر تعریف می‌شود.

- بازی i: مرتضی می‌خواهد شکل i و یا شکل‌های مشابه، حاصل از دوران و تقارن این شکل را با X بسازد و مصطفی می‌خواهد جلوی او را بگیرد.

در چند بازی مرتضی برنده می‌شود؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)



شکل ۱ شکل۲ شکل ۳ شکل٤

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ٤

۱۵- برنامه زیر را در نظر بگیرید:

۱. مقدار X را از ورودی بگیر.
۲. مقدار S را برابر صفر قرار بده.
۳. مقدار C را برابر صفر قرار بده .
٤. مقدار Y را برابر مقدار X قرار بده.
۵. باقی‌مانده‌ی تقسیم Y بر دو را در B و خارج قسمت آن را در خود Y بریز.
٦. مقدار S را برابر با $S + (C + ۱) \times B$ قرار بده.
۷. مقدار C را برابر با $C - ۱$ قرار بده.
۸. اگر Y بزرگتر از صفر بود به خط ۵ برو.
۹. اگر S برابر با X بود مقدار S را به عنوان خروجی برگردان و به برنامه خاتمه بده.
۱۰. مقدار X را برابر با S قرار بده.
۱۱. به خط ۲ برو.

به ازای چند تا از اعضای مجموعه‌ی اگر آن عدد را به عنوان ورودی به این برنامه بدهیم، برنامه خاتمه یافته و خروجی برابر با ۱ خواهد بود؟ (٦ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۰ ب) ۹۹ ج) ۲۵ د) ۵۰ هـ) ۳۳

۱۶- هشت وزنه در اختیار داریم که وزن هیچ یک از آن‌ها را نمی‌دانیم. در عوض می‌دانیم که وزن هر یک از وزنه‌ها یکی از اعضای مجموعه‌ی $\{۱۰,۱۲,۱۳,۱۴,۱۵,۱۸,۳۰,۴۵\}$ است و هم‌چنین وزن هیچ دو وزنه‌ای برابر نیست. یک ترازوی دو کفه‌ای در اختیار داریم. در هر بار استفاده از آن می‌توانیم تعدادی وزنه را در کفه‌ی سمت چپ و تعدادی وزنه را در کفه‌ی سمت راست ترازو قرار دهیم و وزن آن‌ها را با هم مقایسه کنیم. دقت کنید که در هر مقایسه میزان سنگین‌تر بودن یک کفه را نمی‌توان فهمید. بلکه در هر مقایسه فقط می‌توان فهمید که وزنه‌های موجود در کدام کفه سنگین‌تر است و یا وزنه‌ها موجود در دو کفه وزن یکسان دارند. حداقل چند بار از ترازو استفاده کنیم، تا وزن حداقل یکی از وزنه‌ها را بدست آوریم؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۴ د) ۵ هـ) ۷

۱۷- دستگاه «عجیب» به عنوان ورودی زوج مرتب $\langle a,b\rangle$ را می‌گیرد و یکی از شش زوج مرتب $\langle a,a+b\rangle,\langle a+b,b\rangle,\langle a,۲a\rangle,\langle ۲a,b\rangle$ یا $\langle a,۲b\rangle,\langle ۲b,b\rangle$ را تولید می‌کند. زوج مرتب $\langle x,y\rangle$ را قابل تولید گوییم اگر با شروع از $\langle ۱,۱\rangle$ و به تعداد دلخواه استفاده از دستگاه، بتوان زوج مرتب $\langle x,y\rangle$ را تولید کرد. چند زوج مرتب $\langle x,x\rangle$ با $۱\le x\le ۱۰۰$ قابل تولید هستند؟ (۶ نمره‌ی مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۹۹ ب) ۵۱ ج) ۴۲ د) ۱۴ هـ) ۷

۱۸- امروز تولد آیدا، یکی از ساکنین کشور سه‌سوسا است. در این کشور عدد سه بسیار باارزش تلقی می‌شود. طبق یک رسم دوستانه قدیمی، دوستانش قرارست برای او بسته‌های حلوای کلوچه کادو بیاورند. میدانیم شکل ظاهری کلوچه‌های موجود در یک بسته کاملاً شبیه هم است اما وزن آن‌ها ممکن‌ست با هم متفاوت باشند. هم‌چنین وزن کلوچه‌ها یک عدد طبیعی است.

یک آئین قدیمی می‌گوید که اگر فرد A به عنوان کادوی تولد برای فرد B یک بسته حاوی k عدد کلوچه بیاورد و مجموع وزن این k کلوچه مضربی از ۳ گرم باشد، آنگاه A یک «دوست واقعی» B است! برای تشخیص دوستان واقعی، آیدا به بازار می‌رود تا ترازو بخرد. او متوجه می‌شود که ترازوهای موجود در بازار همگی یک کفه‌ای هستند و به‌جای عقربه یا صفحه دیجیتال، تنها فقط یک چراغ دارند که در صورتی که مجموع وزن اشیاء روی کفه ترازو مضربی از ۳ گرم باشد، چراغ روشن می‌شود! علاوه‌براین، ترازوهای موجود دارای محدودیت جالبی در حجم کفه هستند. به این معنی که در بازار ترازوهای مدل $W_۱$ ، مدل $W_۲$ ، مدل $W_۳$ و مدل $W_۴$ وجود دارند که ترازوی مدل W_i تنها در صورتی کار می‌کند که روی آن دقیقاً i تا کلوچه (و نه کمتر یا بیشتر) قرار بگیرد.

متأسفانه آیدا نمی‌داند که هر یک از دوستانش ممکن‌ست چند تا کلوچه برایش بیاورند. و برای همین باید با خرید یک یا چند ترازو و چندین بار استفاده از آن‌ها، بتواند مضرب ۳ بودن مجموع هر بسته کلوچه را تشخیص دهد. یک مجموعه از ترازوها را کامل می‌گوییم اگر بتوانیم با کمک ترازوهای موجود در آن مجموعه، برای هر بسته کلوچه حاوی بیش از ۳ کلوچه، با کمک آن ترازوها و استفاده از قدرت تحلیل و استدلال تشخیص بدهیم که مجموع وزن این بسته کلوچه بر ۳ بخش‌پذیر است یا نه؟ از بین مجموعه‌های $\{W_۱,W_۲\},\{W_۱,W_۳\},\{W_۲,W_۳\}$ و $\{W_۱,W_۴\}$ چند تایشان کامل هستند؟(۶ نمره مثبت، ۱/۵ نمره‌ی منفی)

الف) ۰ ب) ۱ ج) ۲ د) ۳ هـ) ۴

بخش تشریحی

۱- تبدیل دودویی (۱۵ نمره)

ماشین مبدل دودویی یک عدد دودویی با n رقم را از ورودی می‌گیرد و با فشار دادن یکی از دو دکمه‌ی آن، یکی از دو تبدیل زیر را روی عدد ورودی انجام می‌دهد.

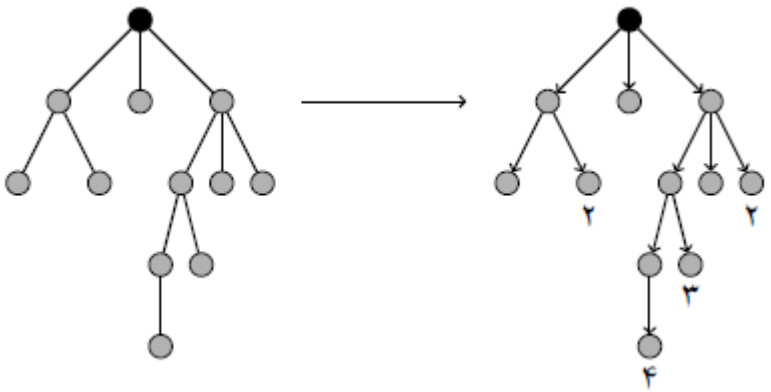
۱. دکمه یک: سمت راست‌ترین رقم را از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد.

۲. دکمه دو: سمت راست‌ترین رقم ۱ را پیدا می‌کند و رقم سمت چپ آن را از ۰ به ۱ و از ۱ به ۰ تغییر می‌دهد. دقت کنید در صورتی که سمت راست‌ترین ۱ در سمت چپ‌ترین مکان باشد یا رشته تمام ۰ باشد، تغییری انجام نمی‌دهد.

برای مثال با استفاده از ماشین مبدل دودویی می‌توان عدد ۰۰۱۰۰۱ را به ۰۱۱۰۰۱ تبدیل کرد. روش تبدیل به این صورت است که ابتدا دکمه یک، سپس دکمه دو و در انتها دکمه یک را فشار می‌دهیم. ثابت کنید با استفاده از ماشین مبدل دودویی می‌توان هر عدد دودویی با n رقم را به هر عدد دودویی با n رقم تبدیل کرد.

۲- پاک کردن درخت (۲۰ نمره)

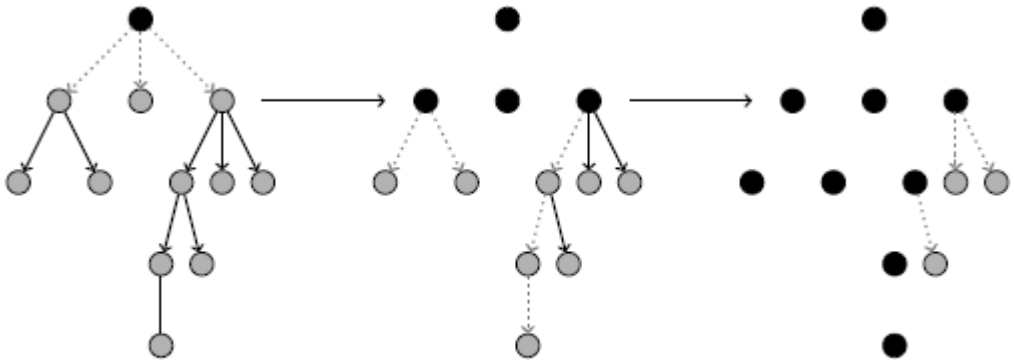
گراف همبند و بدون دور را درخت گویند. درخت T را از رأس r به این صورت ریشه‌دار می‌کنیم که درخت را از رأس r آویزان می‌کنیم و تمام یال‌ها را از بالا به پایین جهت‌دار می‌کنیم. به بیانی دیگر یال‌های درخت را به این صورت جهت‌دار می‌کنیم که تمام یال‌های متصل به r را از r به سمت بیرون جهت می‌دهیم، و بقیه یال‌ها را طوری جهت‌دهی می‌کنیم که تعداد یال‌های وارد شده به هر رأس به غیر از r برابر ۱ شود. دقت کنید که در این صورت تعداد یال‌های وارد شده به r برابر صفر است. فاصله ریشه تا رأس دلخواه i، برابر تعداد یال‌هایی است که برای رسیدن از ریشه به رأس i طی می‌کنیم. برای مثال درخت شکل زیر را از رأس سیاه رنگ ریشه‌دار کرده‌ایم. هم‌چنین فاصله بعضی از رأس‌ها تا ریشه در شکل نشان داده شده است.



هدف پاک کردن یال‌های یک درخت ریشه‌دار در کمترین تعداد مرحله است. در هر مرحله مجاز به انجام یکی از دو عملیات زیر برای هر درخت ریشه‌دار باقی‌مانده هستیم:

- عملیات اول: تمام یال‌های متصل به ریشه را پاک کن.
- عملیات دوم: یکی از رأس‌هایی که بیشترین فاصله را تا ریشه دارند مانند i انتخاب کن. از ریشه و از روی یال‌ها و در جهت یال‌ها به سمت i حرکت کن و یال‌هایی که از آن‌ها عبور کرده‌ای را پاک کن.

در حقیقت در هر مرحله می‌توان بر روی هر درخت ریشه‌دار باقی‌مانده، هر یک از عملیات اول یا دوم را انجام داد. دقت کنید که با پاک شدن یال‌ها، هر درخت ریشه‌دار به یک یا چند درخت ریشه‌دار تبدیل می‌شود. برای مثال در شکل تمام یال‌های درخت اولیه در ۳ مرحله پاک شده‌اند. در این شکل ریشه‌ی درخت‌ها با رنگ سیاه نشان داده شده‌اند. دقت کنید که بعد از مرحله‌ی اول درخت ریشه‌دار اولیه با ۱۲ رأس، به ٤ درخت ریشه‌دار با ۳، ۱، ۱ و ۷ رأس تبدیل شده است.



الف) یک درخت ریشه‌دار با ۱۰۰ رأس داده شده است. روشی ارائه دهید که در ١٤ مرحله تمام یال‌های آن را پاک کند.

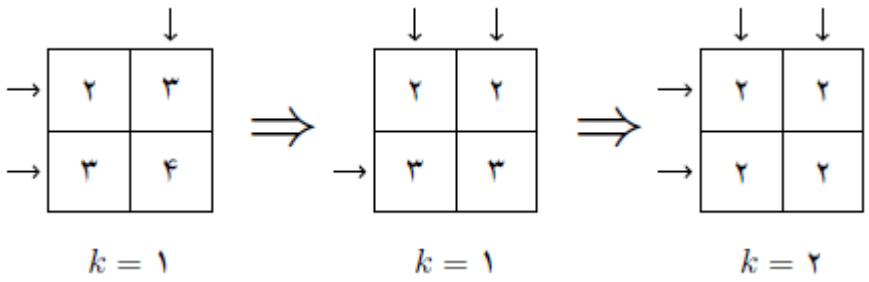
ب) یک درخت ریشه‌دار با ۱۰۰ رأس مثال بزنید که در کمتر از ۱۰ مرحله نتوان تمام یال‌های آن را پاک کرد.

۳- جدول جادویی (**۲۵ نمره**)

جدول جادویی $n \times n$ جدولی است که برای هر i و j که $1 \le i \le n$ و $1 \le j \le n$ ، در خانه‌ی (i,j) آن عدد $i+j$ نوشته شده است. در هر مرحله می‌توان این جدول را به صورت زیر تغییر داد.

- در هر مرحله یک زیرمجموعه از سطرها مانند S، یک زیر مجموعه از ستون‌ها مانند T و یک عدد $k > 0$ انتخاب می‌کنیم. سپس عدد تمام خانه‌های (i,j) که $i \in S$ و $j \in T$ را k واحد کم می‌کنیم.

در مثال زیر تمام اعداد یک جدول جادویی ۲×۲ در سه مرحله صفر شده‌اند. زیر مجموعه‌های S و T توسط پیکان در شکل نشان داده شده‌اند.



الف) روشی ارائه دهید که در ۱۵ مرحله تمام اعداد یک جدول جادویی ۱۰۰×۱۰۰ را صفر کند.

ب) ثابت کنید در کمتر از ١٤ مرحله نمی‌توان تمام اعداد یک جدول جادویی ۱۰۰×۱۰۰ را صفر کرد.

۴- مرتب‌ساز (۲۰ نمره)

تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\pi = \langle \pi_1, \pi_2, ..., \pi_n \rangle$ به طول n برابر تعداد اندیس‌های i و j است که $i < j$ و $\pi_i > \pi_j$. برای مثال تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\langle ۱,۳,۴,۲ \rangle$ برابر ۲ و تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت $\langle ۳,۲,۴,۱ \rangle$ برابر ٤ است. تعداد نابه‌جایی‌های جایگشت π را با $f(\pi)$ نشان می‌دهیم.

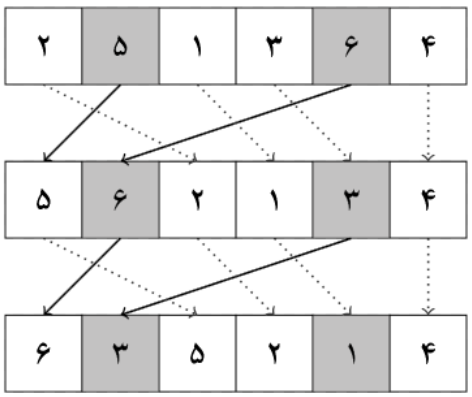
۱۰ کارت داریم که پشت هر کارت یکی از اعداد ۱ تا ۱۰۰ نوشته شده است. به بیان دیگر اعداد نوشته شده پشت کارت‌ها تشکیل یک جایگشت می‌دهند. هم‌چنین یک ماشین با ۱۰۰ جایگاه مخصوص کارت با شماره‌های ۱ تا ۱۰۰ در اختیار داریم. کارت‌ها را با ترتیب دلخواه در این ۱۰۰ جایگاه طوری قرار می‌دهیم که در هر جایگاه دقیقاً یک کارت قرار گیرد. کارت‌ها طوری قرار داده شده‌اند که عدد نوشته شده پشت آن‌ها را نمی‌بینیم. دقت کنید که هر وضعیت قرار گرفتن کارت‌ها در ماشین مشخص کننده‌ی یک جایگشت π است. جایگشت π به این صورت مشخص می‌شود که عدد نوشته شده بر روی کارت موجود در جایگاه i ماشین نشان‌دهنده‌ی π_i است. وضعیت ایده‌آل وضعیتی است که کارت با عدد i در جایگاه با شماره i قرار گیرد. هدف رسیدن به وضعیت ایده‌آل است. برای رسیدن به این هدف می‌توان در هر مرحله به صورت زیر عمل کرد:

- دو عدد i و j را به ماشین می‌دهیم. فرض کنید وضعیت فعلی ماشین مشخص کننده‌ی جایگشت π است. ماشین کارت‌های موجود در جایگاه i و j را با هم جابجا می‌کند. فرض کنید وضعیت ماشین در حالت جدید مشخص کننده‌ی جایگشت π' است. ماشین علاوه بر جابجایی کارت‌های موجود در جایگاه i و j مقدار $f(\pi') - f(\pi)$ را نیز در خروجی نشان می‌دهد.

روشی ارائه دهید که برای هر گونه وضعیت اولیه قرار گرفتن کارت‌ها در ماشین، آن‌ها را در ۱۹۸ مرحله به وضعیت ایده‌آل تبدیل کند.

۵- ماشین درهم ساز (۲۰ نمره)

n کارت روی n خانه‌ی متوالی قرار گرفته‌اند. بر روی کارت‌ها جایگشت π از اعداد ۱ تا n نوشته شده است. ابتدا عدد دلخواه k را انتخاب می‌کنیم و k تا از خانه‌ها را علامت می‌زنیم. سپس در هر مرحله کارت‌های خانه‌های علامت خورده، با حفظ ترتیب، برداشته شده و به k خانه‌ی ابتدایی منتقل می‌شوند. $n-k$ کارت دیگر نیز با حفظ ترتیب در $n-k$ خانه‌ی انتهایی قرار داده خواهند شد. مثالی از انجام این حرکت در دو مرحله در زیر آمده است. در این مثال خانه‌های علامت زده شده با رنگ تیره مشخص شده‌اند.



الف) آیا به ازای هر انتخاب اولیه‌ی خانه‌های علامت‌دار، اتفاق زیر برای هر جایگشت π رخ می‌دهد؟

«با تکرار این حرکت هر جایگشت اولیه π برای اعداد کارت‌ها، به خود آن جایگشت تبدیل شود.»

ب) آیا انتخاب اولیه‌ای برای خانه‌های علامت‌دار وجود دارد که، اتفاق زیر برای هر جایگشت π رخ دهد؟

«با تکرار این حرکت هر جایگشت اولیه π برای اعداد کارت‌ها، به جایگشت صعودی مرتب شده‌ی ۱ تا n تبدیل شود.»